Beispiel Online Unterricht

Datum: Mittwoch 1.4.2020
Fach: Mathematik
Klasse: MB1_19
Lehrer: Dr. Rainer Groll

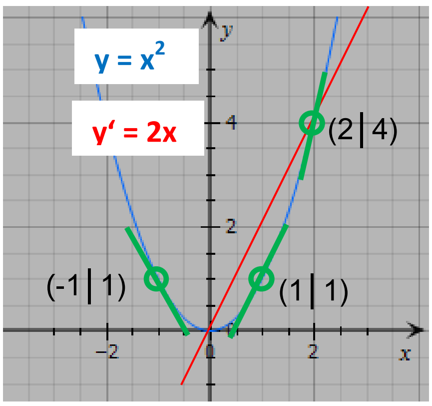
Good-Practice-Beispiel zum Distanzlernen			
Schule	Fachschule für Maschinenbautechnik Traunstein		
Fach	Mathematik		
Thema	Tangenten und Winkel zwischen Geraden		
Phase	**Lehr-Lernarrangement**	**Methode/ Sozialform**	**Medien**
Einstieg	Zusammenhang Tangente und Steigung	Durchsprache Skript	Video https://www.youtube.com/watch?v=lkPWyPg8Hbc https://www.youtube.com/watch?v=-rBOrGT9g1I https://www.youtube.com/watch?v=EmOwmKrZU80
Erarbeitung	Beispiele	Vorführung mit Verständnis-Fragen	Online schreiben / zeichnen am Bildschirm (analog zu Tafelnutzung)
Ergebnissicherung	Durchsprache nächste Schulstunde	Übungen als Hausaufgabe	Aufgaben als .pdf per Email

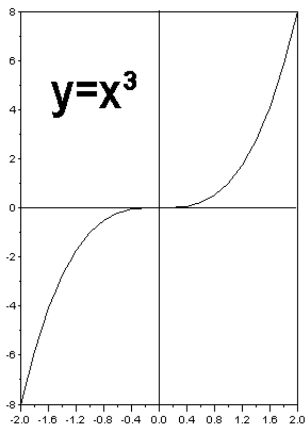
Einstieg / Erarbeitung

Tangenten und Winkel zwischen Geraden

Die Tangente welche die Funktion an einem beliebigen Punkt berührt
hat die Steigung der Kurve an diesem Punkt (= 1.Ableitung)

Beispiel: $f(x) = x^2$	->	$f'(x) = 2x$	$x^3 : f'(x) = 3x^2$
Tangente von $f(x) = x^2$ bei $x = 1$	$P_1\ (1 \mid 1)$	$f'(1) = 2x = 2$	3
Tangente von $f(x) = x^2$ bei $x = 2$	$P_2\ (2 \mid 4)$	$f'(2) = 2x = 4$	12
Tangente von $f(x) = x^2$ bei $x = -1$	$P_3\ (-1 \mid 2)$	$f'(-1) = 2x = -2$	3

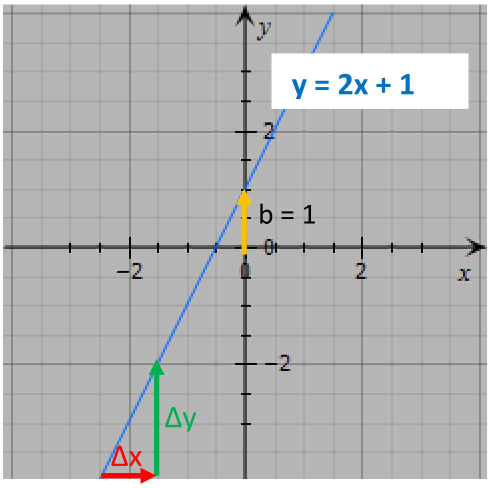




Winkel zwischen Geraden

Winkel zwischen Gerade und x-Achse Steigung, Steigungswinkel

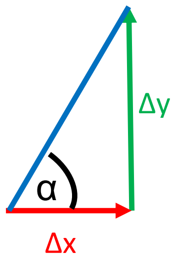
Allgemeine Funktion einer Geraden: $y = mx + b$
wobei m Steigung und b Schnittpunkt mit der y-Achse



y = mx + b
mit $m = \Delta y / \Delta x$

Der Schnittpunkt einer Geraden mit der y-Achse ist der Konstante Anteil b (weil hier x = 0)
Die Steigung m einer Geraden lässt sich mit dem y-Abschnitt / x-Abschnitt bestimmen ($\Delta y/\Delta x$)

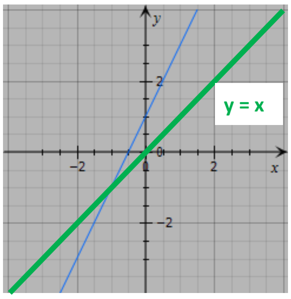
Zusammenhang mit den Winkelfunktionen



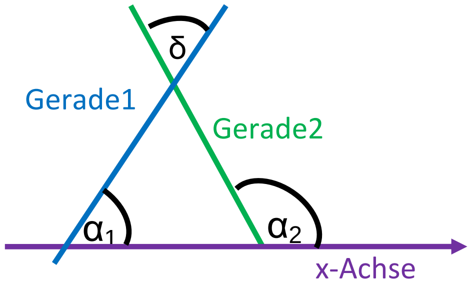
$\tan \alpha$ = Gegenkathete / Ankathete = $\Delta y/\Delta x = m$

Somit entspricht der Winkel α zwischen x-Achse und einer Gerade dem Arcus Tangens der Steigung -> $\alpha = \arctan(m)$

Beispiel
m = 1 -> y = x (Diagonale zwischen x- und y-Achse)
-> α = arc tan (1) = 45° = die Diagonale



Schnittwinkel zweier Geraden
Der Winkel **δ** zwischen den zwei Geraden ist die Differenz jeweiligen Schnittwinkel der Geraden mit der x-Achse

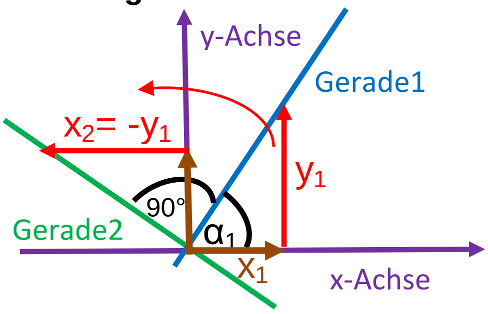


α_1 = arc tan (m_1)
α_2 = arc tan (m_2)

$\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ = arc tan (m_2) - arc tan (m_1)

$180° = \alpha_1 + \delta + (180° - \alpha_2)$
$180° = \alpha_1 + \delta + 180° - \alpha_2 \quad | -180°$
$0 = \alpha_1 + \delta - \alpha_2 \quad \rightarrow \boldsymbol{\delta = \alpha_2 - \alpha_1}$

Sonderfall
Zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander - Orthogonale Geraden



Verdreht man die Gerade1 um 90° gegen den Uhrzeigersinn so erhält man die Gerade2. Dabei wird $x_2 = - y_1$ und $y_2 = x_1$

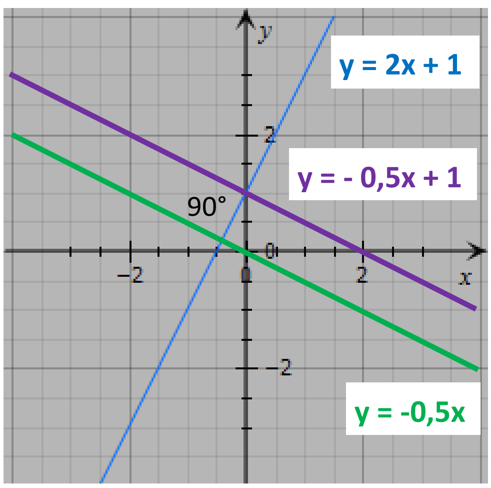
Die Steigung m_2 der Gerade2 ist somit
$m_1 = y_1 / x_1$
$m_2 = y_2/x_2 = x_1/-y_1$
$\rightarrow m_1 * m_2 = (y_1/x_1) * (x_1/-y_1) = \frac{y1*x1}{x1*-y1} = -1$

Stehen zwei Geraden senkrecht aufeinander so ist das Produkt der beiden Steigungen -1.

$\boldsymbol{m_1 * m_2 = -1}$
$\boldsymbol{m_2 = - \frac{1}{m_1}}$

Beispiel
$f_1(x) = 2x + 1 = \mathbf{m_1}{*}x + b$ mit $m_1 = 2$ und $b = 1$

senkrecht darauf steht die Gerade $f_2(x) = -\frac{1}{m_1}x + b = -\frac{1}{2}x + b = -0{,}5x$ | b = 0 gewählt



Ergebnissicherung / Hausaufgabe

Übungsaufgaben Tangenten und Winkel zwischen Geraden

Bestimmen Sie die Tangente von f(x) an den Punkten x = 1 ; 2 ; -1 ; -2
$f(x) = x^2 - 2x + 1$ -> $f'(x) = 2x - 2$
Zeichen Sie Funktion und die Tangenten in ein Koordinatensystem x, y

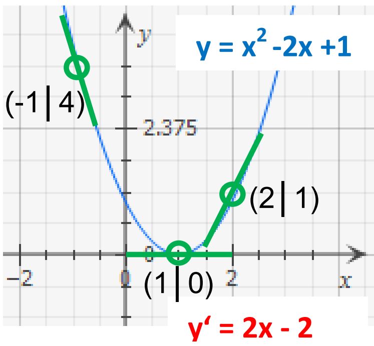
Erwartungshorizont:

bei x = 1
$f(x) = (1)^2 - 2(1) + 1 = 0$ P_1 (1 | 0) $f'(1) = 2x - 2 = 2(1) - 2 = 0$

bei x = 2
$f(x) = (2)^2 - 2(2) + 1 = 1$ P_2 (2 | 1) $f'(2) = 2x - 2 = 4 - 2 = 2$

bei x = -1
$f(x) = (-1)^2 - 2(-1) + 1 = 4$ P_3 (-1 | 4) $f'(1) = 2x - 2 = 2(-1) - 2 = -4$

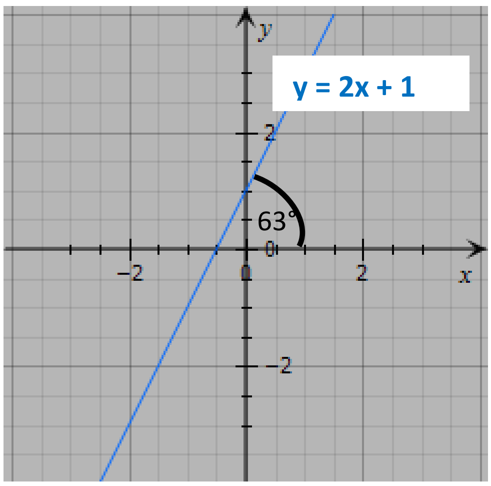
bei x = -2
$f(x) = (-2)^2 - 2(-2) + 1 = 1$ P_4 (-2 | 9) $f'(2) = 2x - 2 = 2(-2) - 2 = -6$



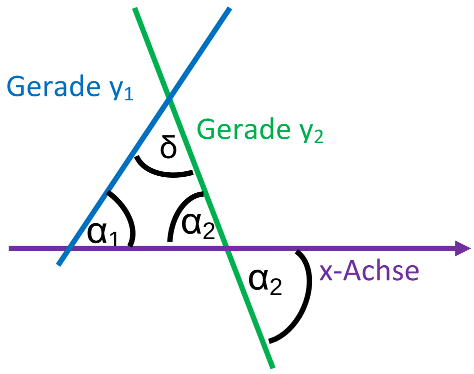
Winkel zwischen Geraden
Bestimmen Sie den Winkel zwischen Gerade und x-Achse
für die Funktion y = 2x + 1
Zeichen Sie Funktion und Winkel in ein Koordinatensystem x, y

Erwartungshorizont:

$y = 2x + 1$ -> $m = 2$ -> $\alpha = \arctan(2) = 63°$



Schnittwinkel zweier Geraden
Bestimmen Sie den Schnittwinkel δ zwischen
$y_1 = x + 1$ $m_1 = 1$
$y_2 = -2x$ $m_2 = -2$



Erwartungshorizont:

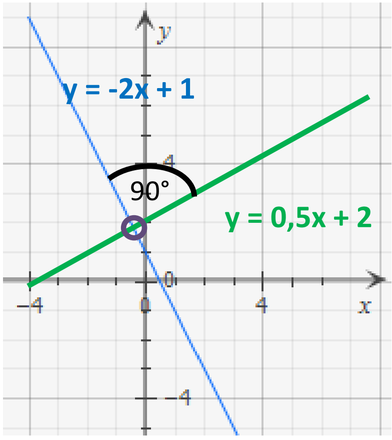
$\alpha_1 = \arctan(m_1) = \arctan(1) = 45°$
$\alpha_2 = \arctan(m_2) = \arctan(-2) = -63°$

$\delta = 180° - \alpha_1 - |\alpha_2| = 180° - 45° - 63° = 72°$

Sonderfall: Zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander
Bestimmen Sie jeweils die zweite Geradengleichung $f_2(x) = \mathbf{m_2}{*}x + b_2$

A) $f_1(x) = -2x + 1 = \mathbf{m_1}{*}x + b$ mit $m_1 = -2$ und $b = 1$
Zeichen Sie Funktion und Winkel in ein Koordinatensystem x, y

Erwartungshorizont:
$m_2 = -\frac{1}{m_1}$
senkrecht auf $f_1(x)$ steht die Gerade $f_2(x) = -\frac{1}{m_1}x + b = -\frac{1}{-2}x + b = 0{,}5x + 2$ | b = 2 gewählt



Schnittpunkt der beiden Geraden
$-2x + 1 = 0{,}5x + 2 \rightarrow 2{,}5x = -1 \rightarrow x = -2/5 \rightarrow y = -2(-2/5) + 1 = 9/5$ P(-2/5 | +9/5) = (- 0,4 | +1,8)

B) $f_1(x) = 3x - 1 = \mathbf{m_1}{*}x + b$ mit $m_1 = 3$ und $b = -1$

Erwartungshorizont:
$m_2 = -\frac{1}{m_1}$
senkrecht auf $f_1(x)$ steht die Gerade $f_2(x) = -\frac{1}{m_1}x + b = -\frac{1}{3}x + b = -\frac{1}{3}x - 1$ | b = -1 gewählt